

VẤN ĐỀ 3. PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN

Dạng 1. Viết phương trình tiếp tuyến tại một điểm thuộc đồ thị hàm số.

1. Phương trình tiếp tuyến tại một điểm thuộc đồ thị:

* $f'(x_0)$ là hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M(x_0; f(x_0))$

* Phương trình tiếp tuyến (PTTT) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M(x_0; y_0)$ với $y_0 = f(x_0)$ là:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$$

2. Phương pháp giải tổng quát

- Bước 1: Tìm tọa độ tiếp điểm $M(x_0; y_0)$

- Bước 2: Tính $y' = f'(x)$, rồi suy ra hệ số góc của tiếp tuyến là $f'(x_0)$

- Bước 3: Thay vào $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$ ta được phương trình tiếp tuyến tại điểm thuộc đồ thị

Câu 1

Cho hàm số $y = f(x)$, có đồ thị (C) và điểm $M_0(x_0; f(x_0)) \in (C)$. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M_0 là:

A. $y = f'(x)(x - x_0) + y_0$.

B. $y = f'(x_0)(x - x_0)$.

C. $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$.

D. $y - y_0 = f'(x_0)x$.

Lời giải

Câu 2

Cho hàm số $y = x^3 + 2x^2 + 1$ có đồ thị là (C) . Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(1; 4)$ là:

A. $y = 3x + 1$.

B. $y = 7x - 3$.

C. $y = 7x + 2$.

D. $y = -x + 5$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 3

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{4}{x-1}$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$ là

A. $y = x - 1$.

B. $y = -x + 2$.

C. $y = -x - 1$.

D. $y = -x - 3$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 4

Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết tung độ tiếp điểm bằng 3

A. $y = 9x - 15$ hay $y = 3$

B. $y = 9x - 4$ hay $y = 3$.

C. $y = 9x - 3$ hay $y = 3$.

D. $y = 9x - 1$ hay $y = 3$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 5

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 1}{2x - 1}$ tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung có phương trình là:

A. $y = -x$.

B. $y = x + 1$.

C. $y = x$.

D. $y = x - 1$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 6

Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2-3x}{x-1}$ tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành bằng :

A. -9 .B. $-\frac{1}{9}$.C. 9 .D. $\frac{1}{9}$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Đạo hàm: $y' = \frac{1}{(x-1)^2}$.

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại $A\left(\frac{2}{3}; 0\right)$.

Hệ số góc của tiếp tuyến là $y'\left(\frac{2}{3}\right) = 9$.

Câu 7

Cho hàm số $y = \frac{2x-4}{x-3}$ có đồ thị là (H). Phương trình tiếp tuyến tại giao điểm của (H) với trục hoành là:

A. $y = 3x + 1$.B. $y = -2x + 4$.C. $y = 2x$.D. $y = 2x - 4$.

Lời giải

Chọn B

Giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là $A(2; 0)$. Ta có: $y' = \frac{-2}{(x-3)^2} \Rightarrow y'(2) = -2$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = -2(x - 2)$ hay $y = -2x + 4$.

Câu 8

Gọi M là giao điểm của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x-2}$ với trục tung. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số trên tại điểm M là:

A. $y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$ B. $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$ C. $y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$ D. $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$

Lời giải:

Chọn C

Vì M là giao điểm của đồ thị với trục $Oy \Rightarrow M\left(0; \frac{1}{2}\right)$

$$y' = \frac{-3}{(x-2)^2} \Rightarrow k = y'(0) = -\frac{3}{4}$$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại điểm M là: $y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$

Dạng 2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ khi biết hệ số góc k của tiếp tuyến.

1. Phương pháp:

- Giải phương trình $f'(x) = k$ giải phương trình này ta tìm được các nghiệm x_1, x_2, \dots, x_n .
- Phương trình tiếp tuyến: $y - f(x_i) = k(x - x_i), (i = 1, 2, \dots, n)$.

2. Một số chú ý:

Đối với bài toán này ta cần lưu ý một số vấn đề sau:

- Số tiếp tuyến của đồ thị chính là số nghiệm của phương trình :

$$f'(x) = k.$$

- Tiếp tuyến tạo với chiều dương của trục Ox góc $\alpha \Rightarrow k = \tan \alpha$.
- Tiếp tuyến song song với đường thẳng $\Delta: y = ax + b \Rightarrow k = a$.
- Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $\Delta: y = ax + b \Rightarrow k = -\frac{1}{a} \quad (a \neq 0)$.
- Tiếp tuyến tạo với $y = ax + b$ góc $\alpha \Rightarrow \tan \alpha = \left| \frac{k - a}{1 + ka} \right|$.
- Nếu tiếp tuyến cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A, B thì $k = \pm \frac{OB}{OA}$

Bài 1

Cho hàm số $y = x^3 - 3x - 2$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng 9.

Lời giải:

Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm M khi đó x_0 là nghiệm của phương trình

$$y'(x_0) = k = 9 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 3 = 9 \Leftrightarrow x_0^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ x_0 = -2 \end{cases} \Rightarrow M(2; 0) \text{ hoặc } M(-2; -4)$$

+) Với $M(2; 0)$ phương trình tiếp tuyến là $y = 9x - 18$.

+) Với $M(-2; -4)$ phương trình tiếp tuyến là $y = 9x + 14$.

Bài 2.

Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) song song với đường thẳng $\Delta: 9x - y + 6 = 0$.

Lời giải

Bài 3

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x+9}{x+1}$ biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: x - 2y + 2 = 0$.

Lời giải**Bài 4***

Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x-2}$ có đồ thị (C) và điểm $I(2;1)$. Viết phương trình tiếp tuyến d của (C) tại điểm M sao cho $IM \perp d$.

Lời giải:

Bài 5*

Cho hàm số $y = \frac{2x+2}{x+2}$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) biết tiếp tuyến tạo với đường thẳng $y = 3x$ một góc 45° .

Lời giải:

C1) Tập xác định $D = R \setminus \{-2\}$.

Giả sử tiếp tuyến d cần tìm có hệ số góc k . Vì d tạo với đường thẳng $y = 3x$ có hệ số góc k' một góc 45°

$$\text{nên suy ra } \left| \frac{k - k'}{1 + k.k'} \right| = \tan 45^\circ = 1 \Leftrightarrow \left| \frac{k - 3}{1 + 3k} \right| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} k = -2 \\ k = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Gọi hoành độ tiếp điểm là nghiệm của phương trình:

$$y'(x_0) = k \Leftrightarrow \frac{2}{(x_0 + 2)^2} = k \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{(x_0 + 2)^2} = -2 \text{ (VN)} \\ \frac{2}{(x_0 + 2)^2} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{(x_0 + 2)^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = -4 \end{cases}$$

Với $x_0 = 0$ suy ra phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = \frac{1}{2}(x - 0) + 1 = \frac{1}{2}x + 1$.

Với $x_0 = -4$ suy ra phương trình tiếp tuyến là $y = \frac{1}{2}(x + 4) + 3 = \frac{1}{2}x + 5$.

Vậy có hai tiếp tuyến thỏa mãn là $y = \frac{1}{2}x + 1; y = \frac{1}{2}x + 5$.

[illegible]

Bài 6*

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{2x+3}$ biết rằng tiếp tuyến cắt trục hoành và trục tung lần lượt tại A và B sao cho tam giác OAB cân tại O với O là gốc toạ độ.

Lời giải:

Bài 7*

Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến này cắt các trục Ox , Oy lần lượt tại A , B mà $OA = 4OB$.

Lời giải:**Bài 8***

Cho hàm số $y = \frac{x-1}{2(x+1)}$ có đồ thị là (C) . Tìm những điểm M trên (C) sao cho tiếp tuyến với (C) tại M tạo với hai trục tọa độ một tam giác có trọng tâm nằm trên đường thẳng $4x + y = 0$.

Lời giải:

Hàm số đã cho xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Gọi $M(x_0; \frac{x_0-1}{2(x_0+1)}) \in (C)$ là điểm cần tìm.

Gọi Δ tiếp tuyến với (C) tại M ta có phương trình Δ :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + \frac{x_0 - 1}{2(x_0 + 1)} \Rightarrow y = \frac{1}{(x_0 + 1)^2}(x - x_0) + \frac{x_0 - 1}{2(x_0 + 1)}$$

$$\text{Gọi } A = \Delta \cap Ox \Rightarrow A\left(-\frac{x_0^2 - 2x_0 - 1}{2}; 0\right), B = \Delta \cap Oy \Rightarrow B\left(0; \frac{x_0^2 - 2x_0 - 1}{2(x_0 + 1)^2}\right).$$

$$\Delta OAB \text{ có trọng tâm là: } G\left(-\frac{x_0^2 - 2x_0 - 1}{6}; \frac{x_0^2 - 2x_0 - 1}{6(x_0 + 1)^2}\right).$$

$$\text{Do } G \text{ thuộc đường thẳng } 4x + y = 0 \Rightarrow -4 \cdot \frac{x_0^2 - 2x_0 - 1}{6} + \frac{x_0^2 - 2x_0 - 1}{6(x_0 + 1)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4 = \frac{1}{(x_0 + 1)^2} \text{ (vì } x_0^2 - 2x_0 - 1 \neq 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + 1 = \frac{1}{2} \\ x_0 + 1 = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -\frac{1}{2} \\ x_0 = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\text{Với } x_0 = -\frac{1}{2} \Rightarrow M\left(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$$

$$\text{Với } x_0 = -\frac{3}{2} \Rightarrow M\left(-\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right).$$

Bài 9*

Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 10$ có đồ thị là (C). Trong tất cả các tiếp tuyến của đồ thị (C), hãy tìm tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất.

Lời giải:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là (C). Lập phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(x_A; y_A)$

1. Phương pháp:

*CÁCH 1:

Bước 1: Phương trình tiếp tuyến đi qua $A(x_A; y_A)$ hệ số góc k có dạng:

$$d: y = k(x - x_A) + y_A (*)$$

Bước 2: d là tiếp tuyến của (C) khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} f(x) = k(x - x_A) + y_A \\ f'(x) = k \end{cases}$$

Bước 3: Giải hệ này tìm được x suy ra k và thế vào phương trình (*)

ta được tiếp tuyến cần tìm.

***CÁCH 2 :**

- 2. Chú ý :** - Số nghiệm k của hệ phương trình trên là số tiếp tuyến cần tìm.
- Nghiệm x của hệ là hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến cần tìm.

Ví dụ 1

Cho đồ thị hàm số $(C): y = f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$. Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến đi qua điểm $A\left(\frac{19}{12}; 4\right)$.

Lời giải:

CÁCH 1

Gọi k hệ số góc của tiếp tuyến đi qua $A\left(\frac{19}{12}; 4\right)$ tới (C) .

Phương trình tiếp tuyến (Δ) là: $y = k\left(x - \frac{19}{12}\right) + 4$.

$$(\Delta) \text{ tiếp xúc với } (C) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 - 3x^2 + 5 = k\left(x - \frac{19}{12}\right) + 4 & (1) \\ 6x^2 - 6x = k & (2) \end{cases} \text{ có nghiệm}$$

Thay k từ (2) vào (1) ta được:

$$2x^3 - 3x^2 + 5 = (6x^2 - 6x)\left(x - \frac{19}{12}\right) + 4 \Leftrightarrow 4x^3 - 6x^2 - 19x + 2 = (x^2 - x)(12x - 19)$$

$$\Leftrightarrow 8x^3 - 25x^2 + 19x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \\ x = \frac{1}{8} \end{cases}$$

Với $x = 1 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến là: $y = 4$

Với $x = 2 \Rightarrow k = 12 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến là: $y = 12\left(x - \frac{19}{12}\right) + 4 \Leftrightarrow y = 12x - 15$

Với $x = \frac{1}{8} \Rightarrow k = -\frac{21}{32} \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến là: $y = -\frac{21}{32}\left(x - \frac{19}{12}\right) + 4 \Leftrightarrow y = -\frac{21}{32}x + \frac{645}{128}$

Vậy từ điểm $A\left(\frac{19}{12}; 4\right)$ kẻ được 3 tiếp tuyến tới (C)

CÁCH 2:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2

Có hai tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{3x-2}{x-1}$ (C) đi qua điểm $A(9;0)$. Tính tích hệ số góc của hai tiếp tuyến đó?

Lời giải

Ví dụ 3*

Tìm điểm trên đường thẳng $y = 2x + 1$ để từ đó kẻ được đến đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{x+3}{x-1}$ đúng một tiếp tuyến?

Lời giải:

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Gọi $A(a; 2a+1) \in d : y = 2x + 1$.

Gọi k là hệ số góc của đường thẳng d' đi qua $A(a; 2a+1)$.

Suy ra phương trình $d' : y = k(x-a) + 2a+1$

Xét hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{x+3}{x-1} = k(x-a) + 2a+1 \\ \frac{-4}{(x-1)^2} = k \end{cases} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{x+3}{x-1} = \frac{-4}{(x-1)^2} (x-a) + 2a+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ 2ax^2 - 2(2a+4)x + 6a+4 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Để từ $A(a; 2a+1)$ chỉ kẻ được một tiếp tuyến đến (C) thì \Leftrightarrow phương trình (1) có một nghiệm \Leftrightarrow phương trình (2) có một nghiệm khác 1.

Có các trường hợp sau:

Trường hợp 1: phương trình (2) là phương trình bậc nhất có nghiệm $x \neq 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ -8x + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ (T/m).}$$

Suy ra $A(0;1)$ thỏa mãn.

Trường hợp 2: phương trình (2) là phương trình bậc hai có nghiệm kép $x \neq 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' = (2a+4)^2 - 2a(6a+4) = 0 \\ x_1 = x_2 = \frac{2a+4}{2a} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ -8a^2 + 8a + 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 2 \end{cases}.$$

Suy ra có 2 điểm thỏa mãn $\begin{bmatrix} A(-1; -1) \\ A(2; 5) \end{bmatrix}$

Trường hợp 3: phương trình (2) là phương trình bậc hai có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm $x = 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' = (2a+4)^2 - 2a(6a+4) > 0 \\ 2a - 2(2a+4) + 6a + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 1. \text{ Suy ra } A(1; 3) \text{ thỏa mãn.}$$

Vậy có 4 điểm thỏa mãn yêu cầu đầu bài.

3) Bài tập mẫu

Bài 1

Tìm số tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = 4x^3 - 6x^2 + 1$, biết tiếp tuyến đó đi qua điểm $M(-1; -9)$.

Lời giải:

TXĐ: \mathbb{R}

Ta có: $y' = 12x^2 - 12x$.

Phương trình đường thẳng đi qua $M(-1; -9)$ có dạng: $(\Delta): y = k(x+1) - 9$.

Δ là tiếp tuyến của đồ thị khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} 4x^3 - 6x^2 + 1 = k(x+1) - 9 \\ k = 12x^2 - 12x \end{cases} \Rightarrow 8x^3 + 6x^2 - 12x - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{4} \\ x = -1 \end{cases}$$

Với $x = -1 \Rightarrow k = 24 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến $y = 24(x+1) - 9 \Leftrightarrow y = 24x + 15$

Với $x = \frac{5}{4} \Rightarrow k = \frac{15}{4} \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến $y = \frac{15}{4}(x+1) - 9 \Leftrightarrow y = \frac{15}{4}x - \frac{21}{4}$

Có 2 tiếp tuyến thỏa mãn yêu cầu .

Bài 2

Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2$ có đồ thị (C) và điểm $M(m;0)$ sao cho từ M vẽ được ba tiếp tuyến đến đồ thị (C) , trong đó có hai tiếp tuyến vuông góc với nhau. Tìm giá trị của m ?

Lời giải:

TXĐ: \mathbb{R}

Ta có $y' = 3x^2 + 6x$.

Đường thẳng d đi qua $M(m;0)$ có hệ số góc k có phương trình : $y = k(x-m)$

d là tiếp tuyến của (C) khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} k(x-m) = x^3 + 3x^2 \\ k = 3x^2 + 6x \end{cases} \Rightarrow (x-m)(3x^2 + 6x) = x^3 + 3x^2 \Leftrightarrow 2x^3 - 3(m-1)x^2 - 6mx = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x^2 - 3(m-1)x - 6m = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Khi $x = 0$ ta có phương trình tiếp tuyến $y = 0$.

Đối với đồ thị hàm số không có tiếp tuyến nào vuông góc với $y = 0$ nên yêu cầu bài toán tương đương phương trình (1) có hai nghiệm x_1 và x_2 khác 0 thỏa

$$y'(x_1) \cdot y'(x_2) = -1 \Leftrightarrow (3x_1^2 + 6x_1)(3x_2^2 + 6x_2) = -1 \Leftrightarrow 9x_1x_2[x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4] + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 9(-3m)[-3m + 3(m-1) + 4] + 1 = 0 \Leftrightarrow -27m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{27}$$

Thay $m = \frac{1}{27}$ vào (1) thử lại có 2 nghiệm phân biệt khác 0.

Vậy $m = \frac{1}{27}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 3

Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$ có đồ thị (C) . Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(0;2)$?

Lời giải:

TXĐ: \mathbb{R}

Ta có: $y' = 4x^3 - 4x$

Đường thẳng d đi qua điểm $A(0;2)$ có hệ số góc k có dạng: $y = kx + 2$

Để đường thẳng d là tiếp tuyến của đồ thị (C) khi và khi hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x^4 - 2x^2 + 2 = kx + 2 \\ 4x^3 - 4x = k \end{cases} \Rightarrow x^4 - 2x^2 + 2 = (4x^3 - 4x)x + 2 \Leftrightarrow 3x^4 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{\frac{2}{3}} \\ x = -\sqrt{\frac{2}{3}} \end{cases}$$

Với $x = 0 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến là: $y = 2$.

Với $x = \sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow k = -\frac{4\sqrt{6}}{9} \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến là: $y = -\frac{4\sqrt{6}}{9}x + 2$.

Với $x = -\sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow k = \frac{4\sqrt{6}}{9} \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến là: $y = \frac{4\sqrt{6}}{9}x + 2$

Bài 4

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ (C) biết tiếp tuyến đó đi qua điểm $A(3;19)$

Lời giải:

Giả sử tiếp điểm của tiếp tuyến cần tìm là điểm $M(x_0; y_0)$. ta có phương trình tiếp tuyến là

$$y = (3x_0^2 - 3)(x - x_0) + x_0^3 - 3x_0 + 1 \quad (d)$$

d đi qua điểm $A(3;19)$ nên ta có: $19 = (3x_0^2 - 3)(3 - x_0) + x_0^3 - 3x_0 + 1$.

Giải phương trình trên ta được $x_0 = 3$ hoặc $x_0 = -\frac{3}{2}$.

Với $x_0 = 3$ thì phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = 24x - 53$.

Với $x_0 = -\frac{3}{2}$ thì phương trình tiếp tuyến là $y = \frac{15}{4}x + \frac{31}{4}$

Vậy có hai tiếp tuyến thỏa mãn yêu cầu bài toán là $y = 24x - 53$ và $y = \frac{15}{4}x + \frac{31}{4}$.

Bài 5

Từ điểm $A(1;3)$ có thể kẻ được bao nhiêu tiếp tuyến đến đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$

Lời giải:

Gọi điểm $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến cần tìm. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số

$$y = \frac{2x+1}{x-1} \text{ tại } M \text{ là: } y = \frac{-3}{(x_0-1)^2}(x-x_0) + \frac{2x_0+1}{x_0-1} \quad (x_0 \neq 1).$$

Tiếp tuyến đi qua $A(1;3)$ nên ta có $3 = \frac{-3}{(x_0-1)^2}(1-x_0) + \frac{2x_0+1}{x_0-1} \quad (x_0 \neq 1)$

$$\Leftrightarrow x_0 = 7$$

Vậy qua điểm A kẻ được duy nhất một tiếp tuyến đến đồ thị hàm số./

Bài 6

Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm $A(0;a)$. Tìm a để từ điểm A kẻ được hai tiếp tuyến đến đồ thị (C) sao cho tiếp điểm nằm về hai phía của trục hoành.

Lời giải:

Giả sử điểm $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến cần tìm. Ta có phương trình tiếp tuyến tại M là

$$y = \frac{-3}{(x_0-1)^2}(x-x_0) + \frac{x_0+2}{x_0-1} \quad (x_0 \neq 1)$$

Tiếp tuyến này đi qua điểm A nên ta có : $a = \frac{3x_0}{(x_0-1)^2} + \frac{x_0+2}{x_0-1} \quad (x_0 \neq 1)$

$$\Leftrightarrow (x_0+2)(x_0-1) - a(x_0-1)^2 + 3x_0 = 0 \quad (x_0 \neq 1)$$

$$\Leftrightarrow (1-a)x_0^2 + (2a+4)x_0 - a - 2 = 0 \quad (*)$$

Theo định lý Viet ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2a+4}{a-1} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{a+2}{a-1} \end{cases}$. Với $x_1; x_2$ là hai nghiệm của (*)

Để tiếp điểm của hai tiếp tuyến nằm về hai phía đối với trục hoành thì $y_1 \cdot y_2 < 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1+2}{x_1-1} \cdot \frac{x_2+2}{x_2-1} < 0 \Leftrightarrow \frac{x_1x_2 + 2(x_1+x_2) + 4}{x_1x_2 - (x_1+x_2) + 1} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{a+2}{a-1} + 2\frac{2a+4}{a-1} + 4}{\frac{a+2}{a-1} - \frac{2a+4}{a-1} + 1} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > -\frac{2}{3} \\ a \neq 1 \end{cases}$$

Vậy với các điểm $A(0;a)$ thỏa mã $a > -\frac{2}{3}; a \neq 1$ ta luôn kẻ được hai tiếp tuyến thỏa mãn đề bài .

Bài 7

Cho hàm số $y = x + \frac{1}{x}$ có đồ thị (C) . Tìm tập hợp các điểm mà từ đó kẻ được hai tiếp tuyến đến đồ thị (C) và hai tiếp tuyến ấy vuông góc với nhau.

Lời giải:

Gọi $M(a;b)$ là điểm bất kì trong mặt phẳng tọa độ. Phương trình đường thẳng d qua M có hệ số góc k là:
 $y = k(x-a) + b$.

d là tiếp tuyến của đồ thị (C) khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} k(x-a) + b = x + \frac{1}{x} \\ k = 1 - \frac{1}{x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} kx = x + \frac{1}{x} + ka - b \\ kx = x - \frac{1}{x}; \quad k < 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow a^2k^2 - 2(ab-2)k + b^2 - 4 = 0 \quad (2)$$

Từ $k = 1 - \frac{1}{x^2}$ ta thấy với mỗi $k < 1$ thì luôn có hai giá trị của x trái dấu, do đó hệ (1) có nghiệm \Leftrightarrow (2) có hai nghiệm $k_1, k_2 < 1$.

Mặt khác, hai tiếp tuyến này vuông góc với nhau nên ta có $k_1.k_2 = -1$.

Yêu cầu bài toán \Leftrightarrow (2) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn: $\begin{cases} k_1.k_2 = -1 \\ k_1, k_2 < 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \frac{b^2 - 4}{a^2} = -1 \\ f(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ a^2 + b^2 = 4 \\ a \neq b \end{cases}.$$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm $O(0;0)$, bán kính bằng 2, sau khi đã bỏ đi 4 điểm là giao với các đường thẳng $x=0, y=x$.

Bài 7

Cho hàm số $y = \frac{2x^2 + mx + m}{x+1}$ có đồ thị (C). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để từ điểm $A(0;1)$ không kẻ được bất kì tiếp tuyến nào đến đồ thị (C).

Lời giải:

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(x_0; y_0)$ là $y = \frac{2x_0^2 + 4x_0}{(x_0 + 1)^2} (x - x_0) + \frac{2x_0^2 + mx_0 + m}{x_0 + 1}$

Tiếp tuyến không đi qua điểm $A(0;1)$ nên phương trình

$$(m-3)x_0^2 + 2(m-1)x_0 + m-1 = 0, \quad (x_0 \neq -1) \quad (*) \text{ vô nghiệm hoặc có nghiệm } x_0 = -1$$

TH1: $m-3=0 \Leftrightarrow m=3$ ta có $x_0 = -\frac{1}{2}$ nên $m=3$ không thỏa mãn

TH2: $m \neq 3$. (*) vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' < 0 \Leftrightarrow m < 1$

TH3: (*) có nghiệm $x_0 = -1$ suy ra $-2=0$ (vô lý).

Vậy $m < 1$ thì không có tiếp tuyến nào của đồ thị (C) đi qua A.

4. Bài tập áp dụng

Bài 1. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ biết tiếp tuyến đó đi qua điểm $A(-2; -1)$.

Bài 2. Cho hàm số $y = -4x^3 + 3x + 2$ có đồ thị (C). Tìm trên đường thẳng $y = 3$ các điểm mà trên đó kẻ được ba tiếp tuyến đến đồ thị (C).

Bài 3. Cho đồ thị hàm số $y = 3x - 4x^3$ có đồ thị (C). Từ điểm $M(1;3)$ có thể kẻ được bao nhiêu tiếp tuyến đến đồ thị (C).

Bài 4. Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm $I(1;2)$. Tìm điểm M thuộc đồ thị (C) có hoành độ lớn hơn 2 sao cho tiếp tuyến tại M vuông góc với đường thẳng IM .

5) Bài tập tự luyện

ĐỀ BÀI:

- Câu 1.** Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm $A(0;a)$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của a trong đoạn $[-2018; 2018]$ để từ điểm A kẻ được hai tiếp tuyến đến (C) sao cho hai tiếp điểm nằm về hai phía của trục hoành?
- Câu 2.** Gọi S là tập hợp các điểm thuộc đường thẳng $y = 2$ mà qua mỗi điểm thuộc S đều kẻ được hai tiếp tuyến phân biệt tới đồ thị hàm số $y = \frac{x^2}{x-1}$ đồng thời hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau. Tính tổng hoành độ T của tất cả các điểm thuộc S .



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

- Câu 1.** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x + 3$ tại điểm $M(1;2)$.
- A. $y = 2x + 2$. B. $y = 3x - 1$. C. $y = x + 1$. D. $y = 2 - x$.
- Câu 2.** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{4}{x-1}$ tại điểm có hoành độ bằng -1 .
- A. $y = -x - 3$. B. $y = -x + 2$. C. $y = x - 1$. D. $y = x + 2$.
- Câu 3.** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^2 + 5$ tại điểm có tung độ bằng -1 và hoành độ âm.
- A. $y = 2\sqrt{6}(x + \sqrt{6}) - 1$. B. $y = -2\sqrt{6}(x + \sqrt{6}) - 1$. C. $y = 2\sqrt{6}(x - \sqrt{6}) + 1$. D. $y = 2\sqrt{6}(x - \sqrt{6}) - 1$.
- Câu 4.** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3$, biết tiếp tuyến có hệ số góc bằng 12 .
- A. $y = 12x \pm 16$. B. $y = 12x \pm 8$. C. $y = 12x \pm 2$. D. $y = 12x \pm 4$.
- Câu 5.** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x$, biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y = 9x$.
- A. $y = 9x + 40$. B. $y = 9x - 40$. C. $y = 9x + 32$. D. $y = 9x - 32$.
- Câu 6.** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 + x$, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: x + 5y = 0$.
- A. $y = 5x - 3$. B. $y = 3x - 5$. C. $y = 2x - 3$. D. $y = x + 4$.
- Câu 7.** Cho hàm số $y = 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5$ có đồ thị là (C) . Trong số các tiếp tuyến của (C) , có một tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất. Hệ số góc của tiếp tuyến này bằng:
- A. $-3,5$. B. $-5,5$. C. $-7,5$. D. $-9,5$.
- Câu 8.** Gọi d là tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất của đồ thị hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 9x - 11$. Hỏi đường thẳng d đi qua điểm nào dưới đây?
- A. $M\left(-5; \frac{2}{3}\right)$. B. $P\left(5; -\frac{2}{3}\right)$. C. $N\left(2; -\frac{5}{3}\right)$. D. $Q\left(-2; \frac{5}{3}\right)$.
- Câu 9.** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = 4x^3 - 6x^2 + 1$, biết tiếp tuyến đi qua điểm $M(-1; -9)$.
- A. $y = 24x + 15$. B. $y = \frac{15}{4}x + \frac{21}{4}$.
C. $y = 24x + 15$; $y = \frac{15}{4}x - \frac{21}{4}$. D. $y = 24x + 33$.
- Câu 10.** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2}{4} - x + 1$, biết tiếp tuyến đi qua điểm $M(2; -1)$.
- A. $y = -x + 1$; $y = x - 3$. B. $y = -x + 3$; $y = x + 1$.
C. $y = -x - 3$; $y = x - 1$. D. $y = -x - 1$; $y = x + 3$.
- Câu 11.** Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) . Gọi d là tiếp tuyến của (C) , biết d đi qua điểm $A(4; -1)$. Gọi M là tiếp điểm của d và (C) , tọa độ điểm M là:
- A. $M(2; 5)$, $M(0; -1)$. B. $M(2; 5)$, $M(-2; 1)$. C. $M(0; -1)$, $M(-2; 1)$. D. $M\left(-1; \frac{3}{2}\right)$, $M(-2; 1)$.
- Câu 12.** Cho hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + 2m + 1$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: x = 1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) và d song song với đường thẳng $\Delta: y = -12x + 4$.

- A. $m = 0$. B. $m = 1$. C. $m = \pm 2$. D. $m = 3$.

Câu 13. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y = 4x + m$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $y = x^3 + x + 2$.

- A. $m = 0$; $m = 4$. B. $m = 1$; $m = 2$. C. $m = 3$. D. Không có giá trị của m .

Câu 14. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để từ điểm $A\left(\frac{2}{3}; 0\right)$ kẻ đến đồ thị hàm số $y = \frac{5}{6}x^3 + mx - \frac{2m}{3}$ hai tiếp tuyến vuông góc nhau.

- A. $m = \frac{1}{2}$; $m = 2$. B. $m = -\frac{1}{2}$; $m = -2$. C. $m = \frac{1}{2}$; $m = -2$. D. $m = -\frac{1}{2}$; $m = 2$.

Câu 15. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$), có đồ thị (C) . Tìm tập hợp tất cả giá trị thực của tham số a để tiếp tuyến của (C) tại điểm $x_0 = -\frac{b}{3a}$ có hệ số góc nhỏ nhất.

- A. $a < 0$. B. $a > 0$. C. $-1 < a < 0$. D. $0 < a < 1$.

Câu 16. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$), có đồ thị (C) . Tìm điều kiện của a, b, c để mọi tiếp tuyến của (C) đều có hệ số góc âm.

- A. $\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$. B. $\begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$. C. $\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac < 0 \end{cases}$. D. $\begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac < 0 \end{cases}$.

Câu 17. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$, có đồ thị (C) . Gọi $A(a; y(a))$, $B(b; y(b))$ là hai điểm phân biệt thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A, B có cùng hệ số góc. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $a + b = 0$. B. $a + b = 1$. C. $a + b = 2$. D. $a + b = 3$.

Câu 18. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ có đồ thị (C) . Gọi $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ với $x_A > x_B$ là các điểm thuộc (C) sao cho các tiếp tuyến tại A, B có cùng hệ số góc k . Hỏi đường thẳng đi qua hai điểm A và B là đường thẳng nào dưới đây?

- A. $y = \frac{1}{3}(6-k)x + 1$. B. $y = \frac{1}{3}(k-6)x - 1$. C. $y = \frac{1}{3}(6-k)x - 1$. D. $y = \frac{1}{3}(k-6)x + 1$.

Câu 19. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3$ có đồ thị (C) . Trên (C) lấy hai điểm phân biệt A và B sao cho tiếp tuyến tại A, B có cùng hệ số góc k và ba điểm O, A, B thẳng hàng. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- A. $-3 < k < 0$. B. $0 < k < 3$. C. $8 < k < 12$. D. $4 < k < 8$.

Câu 20. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ có đồ thị (C) . Gọi $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ với $x_A > x_B$ là các điểm thuộc (C) sao cho các tiếp tuyến tại A, B song song với nhau và $AB = 6\sqrt{37}$. Tính $S = 2x_A - 3x_B$.

- A. $S = 15$. B. $S = 90$. C. $S = -15$. D. $S = -90$.

Câu 21. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x+1}$, biết khoảng cách từ điểm $I(-1; 1)$ đến tiếp tuyến là lớn nhất.

- A. $y = -x + 2$; $y = -x - 2$. B. $y = -x + 2$; $y = -x - 1$.
C. $y = x + 2$; $y = x - 2$. D. $y = -x + 1$; $y = -x - 1$.

Câu 22. Tìm giá trị của tham số a để tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ tại điểm có hoành độ bằng 2 đi qua $M(0; a)$.

- A. $a = 10$. B. $a = 9$. C. $a = 3$. D. $a = 1$.

Câu 23. Biết tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{ax+2}{bx+3}$ tại điểm $M(-2; -4)$ song song với đường thẳng $d: 7x - y + 5 = 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $b - 2a = 0$. B. $a - 2b = 0$. C. $b - 3a = 0$. D. $a - 3b = 0$.

Câu 24. Biết tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x+b}{ax-2}$ tại điểm $M(1; -2)$ song song với đường thẳng $d: 3x + y - 4 = 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $a + b = 2$. B. $a + b = 1$. C. $a + b = 4$. D. $a + b = 0$.

Câu 25. Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{2x+3}$ có đồ thị đi qua điểm $A(1; 1)$. Biết rằng tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho tại điểm có hoành độ bằng -2 có hệ số góc bằng 5. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $a = 2; b = 3$. B. $a = 3; b = 2$. C. $a = 2; b = -3$. D. $a = 3; b = -2$.

Câu 26. Tìm tất cả các cặp số $(a; b)$ để đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{x-1}$ đi qua $A(3; 1)$ và tiếp xúc với đường thẳng $d: y = 2x - 4$.

- A. $(a; b) = (2; 4)$; $(a; b) = (10; 28)$. B. $(a; b) = (2; -4)$; $(a; b) = (10; -28)$.
C. $(a; b) = (-2; 4)$; $(a; b) = (-10; 28)$. D. $(a; b) = (-2; -4)$; $(a; b) = (-10; -28)$.

Câu 27. Biết đồ thị hàm số $y = \frac{ax^2 - bx}{x - 2}$ đi qua điểm $A\left(-1; \frac{5}{2}\right)$ và tiếp tuyến của đồ thị tại gốc tọa độ có hệ số góc bằng -3 .

Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** $4a - b = 1$. **B.** $a - 4b = 1$. **C.** $4a - b = 0$. **D.** $a - 4b = 0$.

Câu 28. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{2x-1}$, có đồ thị (H) . Gọi $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ là hai điểm phân biệt thuộc (H) sao cho tiếp tuyến của (H) tại A, B song song với nhau. Tính tổng $S = x_1 + x_2$.

- A.** $S = 0$. **B.** $S = -1$. **C.** $S = 2$. **D.** $S = 1$.

Câu 29. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{2x-1}$, có đồ thị (H) . Gọi $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ là hai điểm phân biệt thuộc (H) sao cho tiếp tuyến của (H) tại A, B song song với nhau. Tính độ dài nhỏ nhất của đoạn thẳng AB .

- A.** $AB_{\min} = 3\sqrt{2}$. **B.** $AB_{\min} = \sqrt{3}$. **C.** $AB_{\min} = \sqrt{6}$. **D.** $AB_{\min} = 2\sqrt{6}$.

Câu 30. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{2x-1}$, có đồ thị (H) . Gọi $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ là hai điểm phân biệt thuộc (H) sao cho tiếp tuyến của (H) tại A, B có cùng hệ số góc k . Biết diện tích tam giác OAB bằng $\frac{1}{2}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- A.** $k < -9$. **B.** $-9 \leq k < -6$. **C.** $-6 \leq k < -3$. **D.** $-3 \leq k < 0$.

-----Hết-----